

Analisi I

Derivate di funzioni reali

01 – Introduzione.

Il concetto di derivata è alla base del **calcolo differenziale** (detto anche calcolo infinitesimale), il capitolo più importante e fecondo dell'intera analisi matematica.

Le derivate costituiscono lo strumento principe per studiare una funzione e poterne disegnare il grafico. Con la derivata, infatti, si può “esplorare” una funzione e vedere dove essa cresce, decresce o ha un massimo o minimo relativo.

Ancora di più, le leggi della natura sono esprimibili in equazioni che legano certe funzioni (caratteristiche dei fenomeni fisici) alle loro derivate. Le leggi della fisica vengono quindi espresse in equazioni differenziali, lo studio delle cui proprietà e soluzioni è ovviamente vitale per l'intero progresso scientifico e tecnologico dell'umanità.

02 – Definizione di derivata.

Sia $y = f(x)$ una funzione numerica reale definita sul dominio A e sia un punto a appartenente ad $A \cap D(A)$ ($D(A)$ è il derivato di A).

La funzione :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, x \in A - \{a\}$$

è detta **rapporto incrementale**.

Il limite del rapporto incrementale per x tendente ad a , se esiste, si chiama **derivata** di f in a e si scrive :

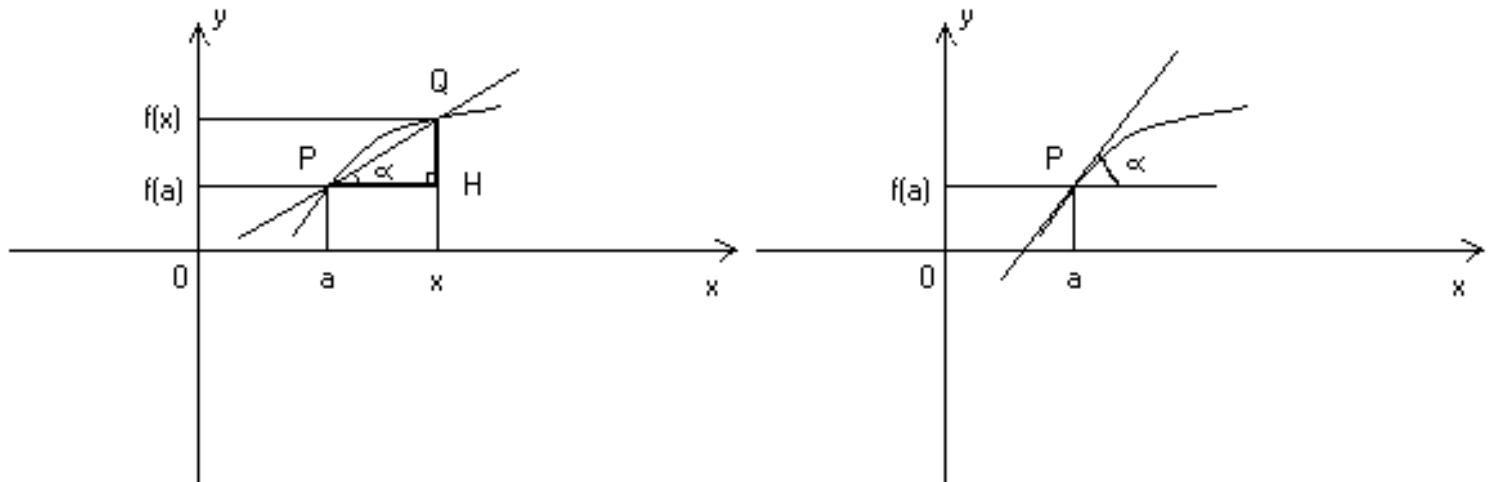
$$f'(a) \text{ oppure } y'(a) \text{ oppure } \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=a} \text{ oppure } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} \text{ oppure } (D(f(x)))_{x=a}$$

Questo limite, se esiste, può essere finito, infinito positivo od infinito negativo.

La derivata della funzione f nel punto a ha un **significato geometrico** evidente :

essa uguaglia il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa a (il coefficiente angolare di una retta di equazione $y = m * x + p$ è il

parametro m che rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse (in senso antiorario))



Infatti, osservando la prima figura, il rapporto incrementale è dato da QH / HP ed uguaglia la tangente trigonometrica dell'angolo α che a sua volta è uguale al coefficiente angolare m della retta secante PQ di equazione $y = m * x + p$.

Al tendere di x ad a , come mostrato nella seconda figura, il punto Q tende ad avvicinarsi sempre più a P e la retta secante PQ tende a diventare la retta tangente al grafico in P . Corrispondentemente la derivata uguaglierà la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta tangente al grafico nel punto P forma con il semiasse positivo delle ascisse (in senso antiorario), ovvero uguaglierà il coefficiente angolare della suddetta retta tangente in P .

Esempi :

- 1 - $y = k$ ($k = \text{costante}$)

$$y'(a) = 0 \quad \text{per ogni valore di } a$$

$$\text{perché } (k - k) / (x - a) = 0 \quad \text{per ogni valore di } x \text{ diverso da } a$$

(questo risultato è verificabile anche graficamente perché la funzione $y = k$ rappresenta una retta parallela all'asse delle x per cui il coefficiente angolare della tangente in ogni punto alla retta è ovviamente 0 (la retta tangente coincide con la retta stessa))

- 2 - $y = x$

$$y'(a) = 1 \quad \text{per ogni valore di } a$$

$$\text{perché } (x - a) / (x - a) = 1 \quad \text{per ogni valore di } x \text{ diverso da } a$$

(questo risultato è verificabile anche graficamente perché la funzione $y = x$ rappresenta una retta di coefficiente angolare 1)

- 3 - $y = x^2$ (^ indica l'operatore di elevamento a potenza)

$$y'(a) = 2 \cdot a$$

perché $(x^2 - a^2) / (x - a) = x + a$ che tende ad $a + a = 2 \cdot a$ per x tendente ad a

- 4 - $y = x^n$

$$y'(a) = n \cdot a^{(n-1)}$$

omettiamo la dimostrazione

- 5 - $y = \sin x$

$$y'(a) = \cos a$$

omettiamo la dimostrazione

- 6 - $y = \cos x$

$$y'(a) = -\sin a$$

omettiamo la dimostrazione

Essendo la derivata un limite (il limite del rapporto incrementale) in linea di principio si può calcolare la derivata di ogni funzione. Essendo detto limite del tipo indeterminato $0/0$, il calcolo può però essere assai problematico.

Vengono in aiuto a questo scopo una serie di teoremi, descritti più avanti, che rendono il calcolo della derivata una operazione pressoché di routine almeno nel caso delle principali funzioni continue di uso comune.

Riguardo al rapporto fra derivabilità e continuità vale il seguente fondamentale teorema :

una funzione dotata di derivata non infinita in un punto è continua in quel punto.

Questo importante teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) può essere riassunto dal seguente schema (in cui le affermazioni fatte saranno giustificate graficamente) :

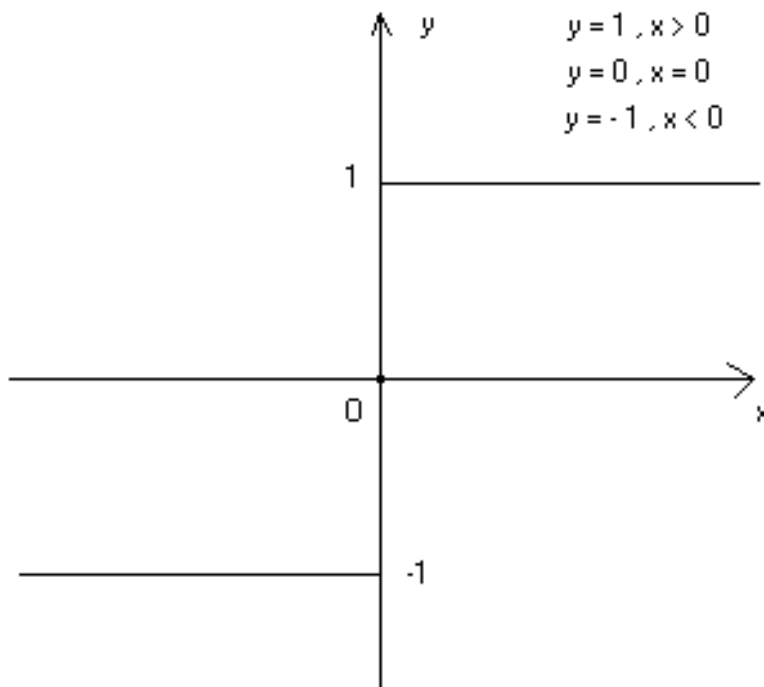
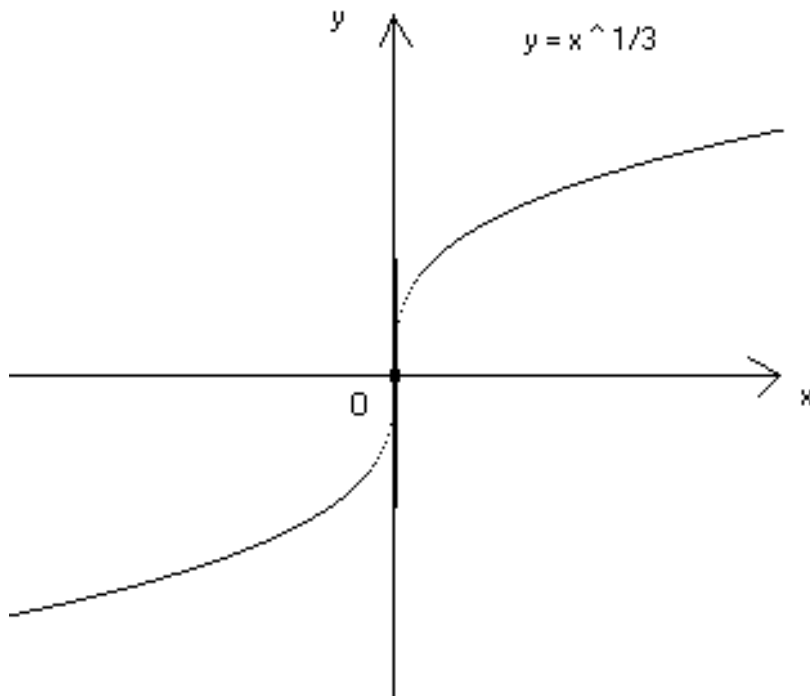
- 1 - esiste la derivata finita in un punto \hat{a} la funzione è continua nel punto.

E' il caso in cui la tangente nel punto ha coefficiente angolare positivo o negativo (finito) e quindi forma un angolo acuto od ottuso, ma diverso da $\pi/2$ (omettiamo l'esempio grafico perché già dato precedentemente)

- 2 - esiste la derivata infinita in un punto \hat{a} la funzione può essere o non essere

continua nel punto.

Per questo caso portiamo l'esempio di una funzione in cui nell'origine la derivata è infinita e la funzione è ivi continua (la funzione radice cubica di x ovvero $y = x^{1/3}$) e l'esempio di una funzione che ha nell'origine derivata infinita ma ivi non è continua (la funzione discontinua che vale 1 per $x > 0$, 0 per $x = 0$ e -1 per $x < 0$):



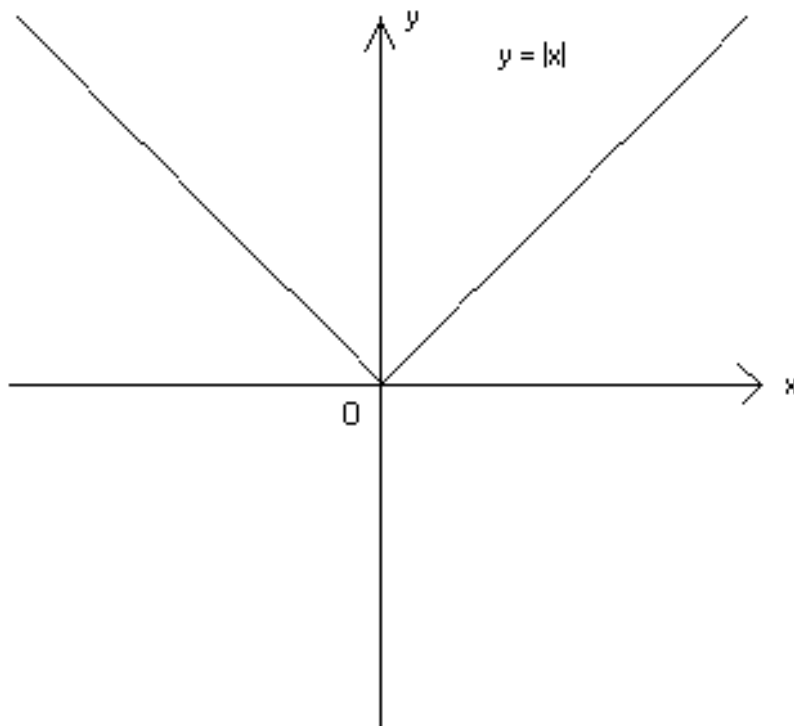
Per la radice cubica di x (primo grafico) in 0 la derivata è infinita perché

il coefficiente angolare della retta tangente è infinito (l'angolo formato dalla tangente nel punto e l'asse delle x è retto).

Per la funzione discontinua in 0 del secondo grafico è semplice dimostrare che in 0 la derivata è $+\infty$. In questo caso, quindi, in un punto con derivata infinita la funzione è discontinua.

- 3 - la funzione è continua in un punto \hat{a} la funzione può avere o non avere derivata nel punto.

Vi sono funzioni che sono continue in un punto ma che ivi non hanno derivata. Per esempio la funzione modulo $y = |x|$ (valore assoluto di x), continua in 0 ma ivi non derivabile :



In questo caso è semplice dimostrare che in 0 non vi è derivata pur essendo la funzione ivi continua.

Vi sono anche funzioni continue in tutto \mathbb{R} ma che non hanno derivata in nessun punto (questo teorema, di cui diamo solo l'enunciazione, è dovuto a Weierstrass).

03 – Derivata destra e derivata sinistra.

Se esiste il limite destro del rapporto incrementale nel punto a esso si chiama **derivata destra**. Analogamente per il limite sinistro che prende il nome di **derivata sinistra**. Si scrive nell'ordine :

$$f'^+(a) = \text{derivata destra di } f(x) \text{ in } a$$

$$f'^-(a) = \text{derivata sinistra di } f(x) \text{ in } a$$

Nel caso di $y = |x|$, come si può verificare graficamente, la derivata destra in 0 è $+1$ e la derivata sinistra in 0 è -1 .

In generale, in un punto esiste la derivata se e solo se esistono e coincidono la derivata destra e sinistra.

04 – Calcolo della derivata.

Diamo in questo paragrafo le regole di calcolo della derivata di una funzione. Queste regole permettono di calcolare la derivata di una funzione qualunque in una grande varietà di casi.

Siano f e g due funzioni numeriche reali definite sul dominio A . Sia a un punto del dominio intersecato con $D(A)$. Supponiamo che esistano $f'(a)$ e $g'(a)$ e siano finite.

Allora valgono le seguenti regole di calcolo (omettiamo le dimostrazioni):

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$$

$$(c * f)'(a) = c * f'(a), \text{ dove } c \text{ è un numero reale}$$

$$(f / g)'(a) = [f'(a) * g(a) - f(a) * g'(a)] / [g(a)^2], \text{ se } g(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \text{ appartenente ad } A$$

Esempi:

$$y = 2 * x^2 - 3 * x + 1 \quad \hat{a} \quad y'(a) = 4 * a - 3$$

$$y = 1 / x \quad \hat{a} \quad y'(a) = -1 / (a^2)$$

Grazie a queste semplici regole di calcolo basta conoscere la derivata di un numero di funzioni elementari sufficientemente vasto, che ogni funzione costituita da esse avrà di conseguenza la derivata facilmente calcolata.

Nel caso di **funzioni composte** (dette anche funzioni di funzioni) si ha il seguente importante teorema:

sia $y = f(x)$ e $z = g(y)$ dove f ha dominio A e g ha dominio $f(A)$. La funzione composta $z = g(f(x))$, stanti le necessarie condizioni, ha derivata in a appartenente ad A e la derivata vale :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=f(a)} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$$

Possiamo giustificare intuitivamente questa formula considerando che nella moltiplicazione al secondo membro fra le derivate i dy si elidono simbolicamente e rimane solo dz / dx come al primo membro. Si giustifica così il fatto che qui abbiamo utilizzato questo particolare formalismo.

Esempio :

$y = \sin 2x$ à $y'(a) = 2 \cos 2a$ in quanto moltiplico la derivata del seno rispetto all'argomento $2x$ per la derivata di $2x$ rispetto ad x

Per una **funzione inversa** vale il seguente importante teorema :

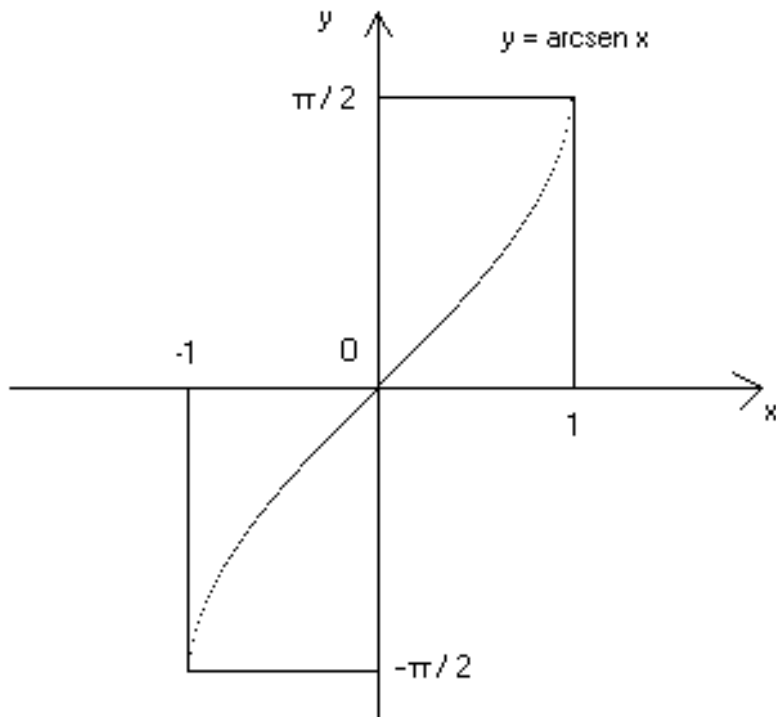
sia $y = f(x)$ una funzione crescente o decrescente e $y = g(x)$ la sua funzione inversa. Se esiste la derivata di f in a (finita e diversa da 0), allora esiste anche la derivata di g in $f(a)$ e le due derivate sono legate dalla relazione :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=f(a)}}$$

La spiegazione intuitiva della formula sta nel fatto che simbolicamente $1 / (dx/dy) = dy/dx$.

Esempio :

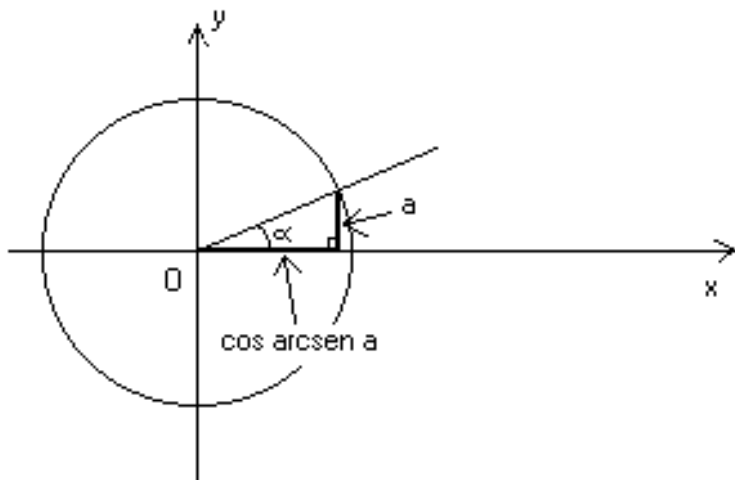
la funzione $y = \sin x$ ha come funzione inversa la funzione $y = \arcsin x$ (l'arcoseno di x , ovvero l'arco il cui seno è x).



Conoscendo la derivata del seno si può così calcolare la derivata della sua funzione inversa arcoseno :

$$\left(\frac{d}{dx} \arcsen x \right)_{x=a} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dy} \sen y \right)_{y=\arcsen a}} = \frac{1}{\cos \arcsen a} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

essendo il coseno dell'arco il cui seno è a la radice quadrata di $1 - a^2$ (teorema di Pitagora) come mostrato nel grafico :



05 – Studio di funzione.

La conoscenza della derivata di una funzione punto per punto fornisce un valido strumento

per il cosiddetto **studio di funzione** tramite il quale è possibile disegnare il grafico di una funzione ed in particolare stabilirne i punti di crescita, decrescenza, di massimo e minimo relativi.

Consideriamo una funzione numerica reale f definita sul dominio A . Sia x_0 un punto del dominio A . Si dice che f è **crescente** o **non decrescente** o **decrescente** o **non crescente** in x_0 se :

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ni \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ oppure } \geq 0 \text{ oppure } < 0 \text{ oppure } \leq 0$$

$$\forall x \in A \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\})$$

Si dice che x_0 è un punto di **massimo relativo forte** o **debole** o un punto di **minimo relativo forte** o **debole** se :

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ni f(x) - f(x_0) > 0 \text{ oppure } \geq 0 \text{ oppure } < 0 \text{ oppure } \leq 0$$

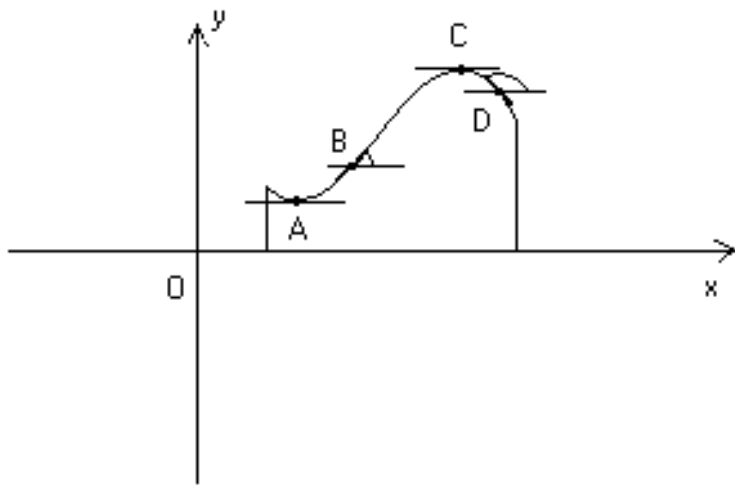
$$\forall x \in A \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\})$$

Geometricamente un punto di massimo o minimo relativo è un punto del grafico della funzione in cui la tangente è parallela all'asse delle ascisse ovvero la derivata in quel punto è nulla.

Un punto in cui la funzione è crescente è un punto del grafico della funzione in cui la tangente forma con il semiasse positivo delle x (in senso antiorario) un angolo acuto ovvero il coefficiente angolare della tangente è positivo ovvero la derivata è positiva (potrebbe essere anche nulla nel punto ma positiva nell'intorno).

Un punto in cui la funzione è decrescente è un punto del grafico della funzione in cui la tangente forma con il semiasse positivo delle x (in senso antiorario) un angolo ottuso ovvero il coefficiente angolare della tangente è negativo ovvero la derivata è negativa (potrebbe essere anche nulla nel punto ma negativa nell'intorno).

Ciò risulta chiaro dal grafico :



in cui A è un minimo relativo, B è un punto di crescita, C è un massimo relativo e D è un punto di decrescenza.

Queste considerazioni geometriche sono qui state riportate in modo intuitivo e senza una completa rigorosità per ragioni di semplicità ed immediatezza. Esse devono servire come strumento intuitivo per una rapida "presa di coscienza" dell'andamento di una funzione.

Per esempio, data la funzione :

$$y = x^4 - 1$$

la sua derivata nel generico punto x è :

$$y' = 4 * x^3$$

per cui si vede subito che per valori di x positivi la funzione è crescente mentre per valori negativi di x la funzione è decrescente. In $x = 0$ vi deve essere allora un punto di minimo relativo.

Con semplici considerazioni sulle proprietà della derivata abbiamo quindi immediatamente intuito l'andamento della funzione data.

Naturalmente lo studio di una funzione necessita di un approfondimento più rigoroso che può essere esposto nei seguenti punti salienti :

- 1 - definizione del dominio della funzione
- 2 - definizione delle parti del dominio in cui la funzione è positiva, negativa e nulla
- 3 - calcolo dei limiti destri e sinistri nei punti particolari del dominio (punti di frontiera, di discontinuità, ecc.) nonché agli infiniti positivo e negativo (qualora il dominio sia non limitato)
- 4 - calcolo della derivata e definizione dei punti dove essa è positiva, negativa e nulla

ovvero definizione dei punti di crescita, decrescenza, massimi e minimi relativi

Raccolte queste informazioni, sarà possibile porle sul piano cartesiano e quindi disegnare il grafico della funzione data.

Esistono altre particolarità geometriche nello studio di una funzione, quali concavità e punti di flesso, che verranno esposti più avanti ed altre ancora che non verranno qui esposte perché considerate non rilevanti in questa esposizione generale.

Come esempio di studio di funzione consideriamo la funzione :

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Essa ha come dominio $\mathbb{R} - \{+1, -1\}$ in quanto per $x = +1$ e $x = -1$ il denominatore si annulla. Nel dominio la funzione è continua.

La funzione è positiva per valori esterni all'intervallo $[-1, +1]$. La funzione è negativa nell'intervallo $] -1, +1[$. La funzione si annulla per $x = 0$ ed ivi vale -1 .

I limiti salienti sono :

$$\lim_{x \rightarrow +1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$$

La retta di equazione $y = 1$ parallela all'asse delle x si chiama **asintoto orizzontale** perché la funzione si avvicina ad essa sempre di più col tendere di x agli infiniti.

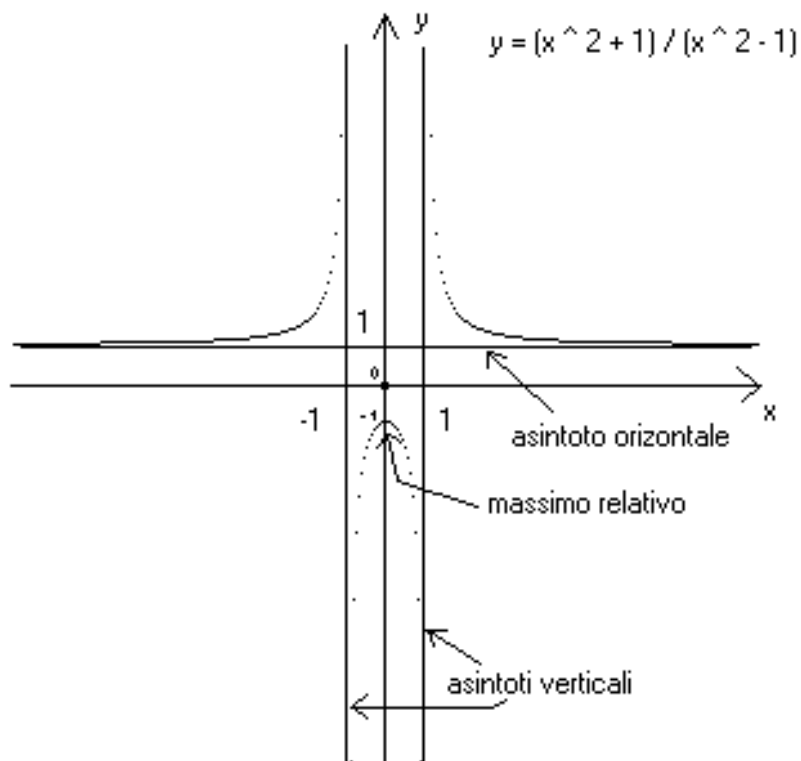
Le rette $x = +1$ e $x = -1$, parallele all'asse delle y , si chiamano **asintoti verticali**.

La derivata della funzioni a conti fatti è :

$$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Essa è positiva per $x < 0$, negativa per $x > 0$ e nulla per $x = 0$. Ciò implica che per $x < 0$ la funzione è crescente, per $x > 0$ la funzione è decrescente e per $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo.

A questo punto siamo in grado di disegnare la funzione :

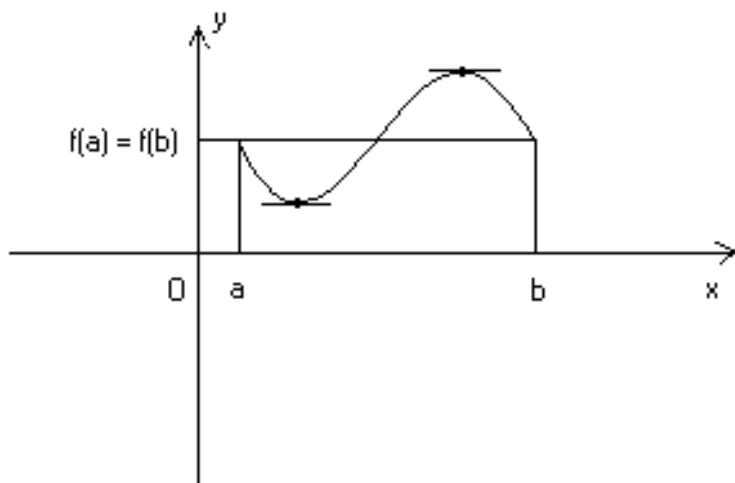


Concludiamo l'argomento dello studio di funzione con due importanti teoremi (di cui omettiamo la dimostrazione) :

- 1 - teorema di Rolle :

sia f continua in $[a, b]$ con $f(a) = f(b)$ ed esista la derivata di f su tutto $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto appartenente ad $]a, b[$ in cui la derivata è nulla.

Graficamente :

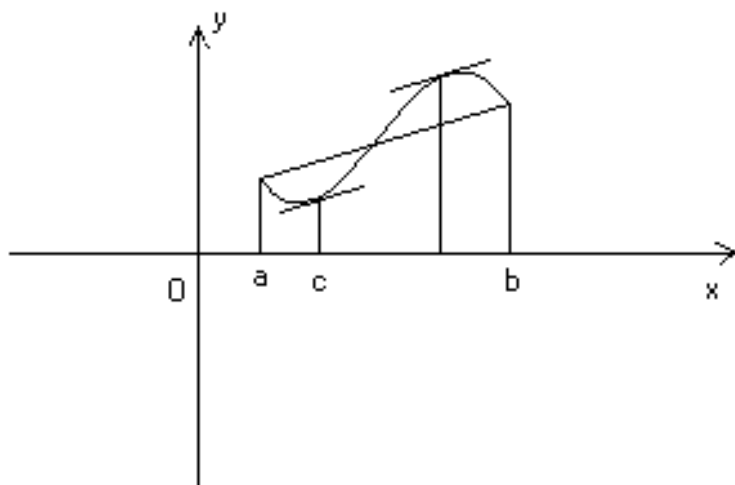


- 2 - teorema del valor medio di Lagrange :

sia f continua in $[a, b]$ ed esista la derivata di f su tutto $]a, b[$. Allora esiste almeno punto c appartenente ad $]a, b[$ tale che :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graficamente :



06 – Teorema di de l’Hospital.

Questo importante teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) permette di risolvere i limiti indeterminati del tipo $0/0$ e ∞/∞ .

Consideriamo due funzioni, f e g , che tendono entrambe a 0 o all’ ∞ (positivo o negativo) per x tendente ad un punto o all’ ∞ (positivo o negativo). Sotto le opportune condizioni si ha :

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(per semplicità abbiamo omissso i termini $x \rightarrow a$).

Come esempio risolviamo il limite del tipo $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x}$$

Facendo le derivate sopra e sotto si ottiene :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

07 – Infinitesimi ed infiniti.

Per la soluzione dei limiti indeterminati del tipo $0/0$ e ∞/∞ sono utili anche i concetti di infinitesimo ed infinito.

Sia f una funzione che tende a 0 per x tendente ad un punto o all'infinito (positivo o negativo). Una tale funzione si dice che è un **infinitesimo**.

Sia f una funzione che tende a ∞ (positivo o negativo) per x tendente ad un punto o all'infinito (positivo o negativo). Una tale funzione si dice che è un **infinito**.

Infinitesimi ed infiniti si possono paragonare fra loro (naturalmente infiniti con infiniti, infinitesimi con infinitesimi) e si può introdurre il concetto di **ordine** di un infinitesimo o di un infinito rispetto ad un altro. Si ha sinteticamente :

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \text{non esiste}$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

(per semplicità abbiamo omissso i termini $x \rightarrow a$).

Nel primo caso si dice che i due infinitesimi od infiniti **non** sono **confrontabili**.

Nel secondo caso si dice che sono dello **stesso ordine**.

Nel terzo caso si dice che f è di **ordine superiore** rispetto a g (se f e g sono infinitesimi) oppure

che f è di **ordine inferiore** rispetto a g (se f e g sono infiniti).

Nel quarto caso si dice che f è di **ordine inferiore** rispetto a g (se f e g sono infinitesimi) oppure

che f è di **ordine superiore** rispetto a g (se f e g sono infiniti).

Intuitivamente, determinare l'ordine di un infinitesimo od infinito rispetto ad un altro, significa confrontare le “velocità” nel tendere a 0 od all' ∞ che essi hanno (qui la velocità non ha nessuna implicazione cinematica, usiamo questo termine solo per dare un'idea intuitiva di come si può “quantizzare” la convergenza o la divergenza al solo scopo di confrontarle).

Se l'ordine è il medesimo significa che i due infinitesimi od infiniti sono comparabili ovvero tendono a 0 od all' ∞ con la stessa “velocità”.

Se un infinitesimo è di ordine superiore rispetto ad un altro, ciò significa che il primo tende a 0 più “velocemente” del secondo (infatti il rapporto tende a 0 , ovvero il numeratore va a 0 più “velocemente” del denominatore).

Se un infinitesimo è di ordine inferiore rispetto ad un altro, ciò significa che il secondo tende a 0 più “velocemente” del primo (infatti il rapporto tende a ∞ , ovvero il denominatore va a 0 più “velocemente” del numeratore).

Se un infinito è di ordine superiore rispetto ad un altro, ciò significa che il primo tende a ∞ più “velocemente” del secondo (infatti il rapporto tende a ∞ , ovvero il numeratore va a ∞ più “velocemente” del denominatore).

Se un infinito è di ordine inferiore rispetto ad un altro, ciò significa che il primo tende a ∞ più “lentamente” del secondo (infatti il rapporto tende a 0 , ovvero il denominatore va a ∞ più “velocemente” del numeratore).

Si dice che un infinitesimo o un infinito f è di ordine α rispetto ad un altro infinitesimo o un infinito g se esiste un numero $\alpha > 0$ tale che il limite :

$$\lim \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha}$$

è reale e diverso da 0 (per semplicità omettiamo i termini $x \rightarrow 0$). In questo caso si dice che l'ordine di f rispetto a g è α e si scrive :

$$\text{ord}_g f = \alpha$$

Questi concetti portano all'importante teorema noto come **il principio di sostituzione degli infinitesimi ed infiniti** che può essere usato per il calcolo dei limiti indeterminati $0/0$ e ∞/∞ :

consideriamo il rapporto :

$$\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}$$

dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono o tutti infinitesimi o tutti infiniti. Per il calcolo del limite del rapporto si possono eliminare al numeratore ed al denominatore gli infinitesimi di ordine superiore oppure gli infiniti di ordine inferiore.

Intuitivamente il teorema si spiega considerando che un infinitesimo di ordine superiore va a 0 più "velocemente" dell'altro, per cui può essere trascurato, mentre un infinito di ordine inferiore va all' ∞ più "lentamente" dell'altro, per cui può essere trascurato.

Esempio :

calcoliamo il limite indeterminato del tipo ∞/∞ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4x + 2}$$

Evidentemente $2x^2$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $-3x + 1$ così come x^2 è un infinito di ordine superiore rispetto a $-4x + 2$. Applicando il principio di sostituzione degli infiniti, il limite così si risolve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

08 – Derivate di ordine superiore ad uno.

La derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$ è essa stessa una funzione che collega ogni punto di x alla derivata della funzione $f(x)$. Essendo $f'(x)$ una funzione è possibile fare la derivata di essa stessa. Si otterrà così la **derivata seconda** $f''(x)$. Poi la **derivata terza** $f'''(x)$ ecc. ecc. Per questo la derivata $f'(x)$ è detta anche **derivata prima**.

Così facendo si possono creare le **derivate di ordine superiore ad uno** che vengono indicate da :

$$f^{(n)}(a) \text{ oppure } y^{(n)}(a) \text{ oppure } \left(\frac{d^{(n)} f(x)}{dx^{(n)}} \right)_{x=a} \text{ oppure } \left(\frac{d^{(n)} y}{dx^{(n)}} \right)_{x=a} \text{ oppure } \left(D^{(n)}(f(x)) \right)_{x=a}$$

dove a è un punto ed n è un numero intero positivo o nullo.

Si conviene porre :

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

per cui la derivata di ordine 0 è la funzione stessa.

Esempio :

$$y = x^n$$

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

...

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots (1)x^{n-n} = n!$$

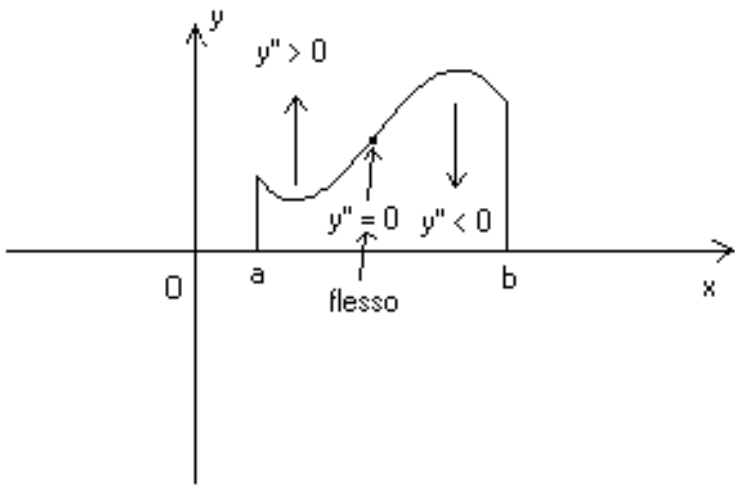
09 – Concavità e punti di flesso.

Per quanto riguarda lo studio di funzione, la derivata seconda occupa un ruolo molto importante.

Se in un punto la derivata seconda è positiva allora in quel punto la funzione **ha concavità verso l'alto**, se è negativa ha **concavità verso il basso**.

Se in un punto la derivata seconda è nulla e a destra e a sinistra del punto essa ha valori di segno opposto, quel punto è detto **punto di flesso**.

Graficamente :



Fine.

[Pagina precedente](#)

[Home page](#)